BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ
№3 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2006

MEXANİKA

ПОСТРОЕНИЕ ОДНОРОДНЫХ РЕШЕНИЙ НЕОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ ИЗГИБА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОЙ ПЛИТЫ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

М.Ф. МЕХТИЕВ, А.Р.АМРАХОВА, П.М.САДЫКОВ
Бакинский Государственный Университет
Азербайджанский Университет языков
Азербайджанский Архитектурно-Строительный Университет

Рассматривается неосесимметричная задача изгиба теории упругости для трансверсально-изотропной плиты переменной толщины.

Общая задача теории упругости для плиты переменной толщины расчленяется на две независимые задачи: задачу растяжения и задачу изгиба плиты.

В настоящей работе построены однородные решения для задачи изгиба.

1. Пусть $V=[R_1,R_2]\times[\theta_1,\theta_2]\times[0,2\pi]$ – объем, занятый плитой переменной толщины. Плита отнесена к сферической системе координат r, θ, φ, изменяющихся в следующих пределах:

$$r_1 \le r \le r_2,\ \frac{\pi}{2}-\varepsilon \le \theta \le \frac{\pi}{2}+\varepsilon;\ 0 \le \varphi \le 2\pi .$$

Конические поверхности $\theta=\frac{\pi}{2}\pm\varepsilon$ будем называть торцами плиты, сферические поверхности $r=r_s$ $(s=1,\,2)$ – боковыми поверхностями. Плита изготовлена из трансверсально-изотропного материала со сферической анизотропией. Считаем, что начало системы координат совпадает с центром плиты, который является полюсом анизотропии.

Предположим, что на торцах плиты заданы следующие однородные граничные условия:

$$\sigma_\theta=0,\ \tau_{r\theta}=0,\ \tau_{\theta\varphi}=0 \ \text{при}\ \theta=\frac{\pi}{2}\pm\varepsilon . \qquad (1.1)$$

Предположим, что со стороны боковых поверхностей на плиты действует нагрузка:

$$\sigma_r=q_r^{(s)}(\theta,\varphi),\ \tau_{r\theta}=q_{r\theta}^{(s)}(\theta,\varphi),\ \ \tau_{r\varphi}=q_{r\varphi}^{(s)}(\theta,\varphi). \qquad (1.2)$$

Отметим, что в настоящей работе будем рассматривать только однородные граничные условия на торцах плиты, так как снятие нагрузки с торцов плиты можно осуществить с помощью приемов, развитых в работах [1, 2].

Уравнения равновесия в напряжениях при отсутствии массовых сил в сферической системе координат имеют вид [3]:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \sigma_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial \varphi}+\frac{2\sigma_r-\sigma_\theta-\sigma_\varphi+\tau_{r\theta}\operatorname{ctg}\theta}{r}=0,\\
\frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{\theta\varphi}}{\partial \theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \sigma_{\varphi}}{\partial \varphi}+\frac{3\tau_{r\varphi}+2\tau_{\theta\varphi}\operatorname{ctg}\theta}{r}=0.\\
\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\theta}}{\partial \theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \tau_{\theta\varphi}}{\partial \varphi}+\frac{(\sigma_\theta-\sigma_\varphi)\operatorname{ctg}\theta+3\tau_{r\theta}}{r}=0.
\end{gathered}\tag{1.3}$$

Соотношения обобщённого закона Гука имеют вид:

$$\begin{gathered}
\sigma_r=b_{11}\varepsilon_r+b_{12}(\varepsilon_\theta+\varepsilon_\varphi),\ \ \tau_{r\theta}=G_1\varepsilon_{r\theta},\\
\sigma_\varphi=b_{12}\varepsilon_r+b_{23}\varepsilon_\theta+b_{22}\varepsilon_\varphi,\ \ \tau_{r\varphi}=G_1\varepsilon_{r\varphi},\\
\sigma_\theta=b_{12}\varepsilon_r+b_{22}\varepsilon_\theta+b_{23}\varepsilon_\varphi,\ \ \tau_{\theta\varphi}=G\varepsilon_{\theta\varphi}.
\end{gathered}\tag{1.4}$$

b_{ij}, G_1, G – материальные константы.

$$\begin{gathered}
\varepsilon_r=\frac{\partial u_r}{\partial r},\ \ \varepsilon_\theta=\frac{u_r}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta},\ \varepsilon_\varphi=\frac{u_r}{r}+\frac{ctg\theta}{r}u_\theta+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi},\\
\varepsilon_{r\theta}=\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}-\frac{u_\theta}{r}+\frac{\partial u_\theta}{\partial r},\ \ \varepsilon_{r\varphi}=\frac{\partial u_\varphi}{\partial r}-\frac{u_\varphi}{r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial \varphi},\\
\varepsilon_{\theta\varphi}=\frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta}-\frac{ctg\theta}{r}u_\varphi+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi}.
\end{gathered}\tag{1.5}$$

u_r, u_θ, u_φ – компоненты вектора перемещений.

Подставляя (1.5), (1.4) в (1.3), после несложных выкладок получим уравнения равновесия в перемещениях

$$\begin{gathered}
b_{11}\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2}+\frac{2b_{11}}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{2}{r^2}\left(b_{12}-b_{22}-b_{23}\right)u_r+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2}+\frac{1}{r^2}ctg\theta\frac{\partial u_r}{\partial \theta}+\\
+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u_r}{\partial \varphi^2}+\left[\frac{b_{12}+1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{b_{12}-b_{22}-b_{23}-1}{r^2}\right]\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}+ctg\theta u_\theta\right)+\\
+\frac{1}{\sin\theta}\left[(b_{12}+1)\frac{\partial}{\partial r}+\frac{b_{12}-b_{22}-b_{23}-1}{r^2}\right]\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi}=0,\\
\frac{b_{12}+1}{r\sin\theta}\frac{\partial^2 u_r}{\partial r\partial \varphi}+\frac{b_{22}+b_{23}+2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial \varphi}+\frac{b_{23}+G_0}{r^2\sin\theta}\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta\partial \varphi}+\frac{b_{22}+G_0}{r^2\sin\theta}ctg\theta\frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi}+\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial r^2}+\\
+\frac{2}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial r}+\frac{G_0}{r^2}\left(\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \theta^2}+ctg\theta\frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta}-\frac{u_\varphi}{\sin^2\theta}\right)+\frac{b_{22}}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \varphi^2}+\frac{2(G_0-1)}{r^2}u_\varphi=0
\end{gathered}\tag{1.6.}$$

$$\frac{b_{12}+1}{r}\frac{\partial^2 u_r}{\partial r\partial\theta}+\frac{b_{22}+b_{23}+2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}+\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial r}+\frac{b_{22}}{r^2}\left(\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial\theta^2}+ctg\theta\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}-\frac{u_\theta}{\sin^2\theta}\right)+$$

$$+\frac{2(G_0-1)}{r^2}u_\theta+\frac{G_0}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial\varphi^2}+\frac{b_{23}+G_0}{r^2\sin\theta}\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial\theta\partial\varphi}-\frac{b_{22}+G_0}{r^2\sin\theta}ctg\theta\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}=0.$$

Здесь

$$b_{ij}=\frac{A_{ij}}{G_1},\ G_0=G\cdot G_1^{-1},\ E_0=E_1\cdot E^{-1}$$

$$mb_{11}=2G_0E_0(1-\nu^2),$$

$$mb_{22}=2G_0(1-\nu_1\nu_2),$$

$$mb_{12}=2G_0\nu_1(1+\nu),$$

$$mb_{23}=2G_0(\nu+\nu_1\nu_2),$$

$$m=1-\nu-2\nu_1\nu_2,.$$

$\nu,\ \nu_1,\ \nu_2,\ G,\ G_1,\ E,\ E_1$ – технические константы материала.

Следуя [4], разобьем двумерное векторное поле $\overline{\upsilon}=(u_\theta,\ u_\varphi)$ на потенциальную и вихревую части, полагая

$$u_\theta=r\frac{\partial\phi}{\partial\theta}+\frac{r}{\sin\theta}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial\varphi},\quad u_\varphi=\frac{r}{\sin\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}-r\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\tag{1.7}$$

Поставляя соотношения (1.7) в уравнении (1.6) и граничные условия (1.2), получаем

$$L_1(u_r,\ \phi)=0\tag{1.8}$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}L_2(u_r,\ \phi)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}L_3(\psi)=0\tag{1.9}$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}L_2(u_r,\ \phi)-\frac{\partial}{\partial\theta}L_3(\psi)=0\tag{1.10}$$

$$M_1(u_r,\ \phi)\big|_{r=r_s}=q_r^{(s)}(\theta,\ \varphi)\tag{1.11}$$

$$\begin{aligned}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}M_2(u_r,\ \phi)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}M_3(\psi)\right]_{r=r_s}&=q_{r\theta}^{(s)}(\theta,\ \varphi)\\ \left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}M_2(u_r,\ \phi)-\frac{\partial}{\partial\theta}M_3(\psi)\right]_{r=r_s}&=q_{r\varphi}^{(s)}(\theta,\ \varphi),\end{aligned}\tag{1.12}$$

где

$$L_1(u_r,\ \phi)=b_{11}\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2}+\frac{2b_{11}}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{2}{r^2}(b_{12}-b_{22}-b_{23})u_r+\frac{1}{r^2}\Delta_0 u_r+$$

$$+\left[(b_{12}+1)\frac{\partial}{\partial r}+\frac{2b_{12}-b_{22}-b_{23}-1}{r^2}\right]\Delta_0\phi,$$

$$L_2(u_r,\phi)=\frac{b_{11}+1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{b_{22}+b_{23}+2}{r^2}u_r+r\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}+4\frac{\partial\phi}{\partial r}+\frac{2G_0}{r}\phi+\frac{b_{22}}{r}\Delta_0\phi,$$

$$L_3(\psi)=r\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+4\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{2G_0}{r}\psi+\frac{G_0}{r}\Delta_0\psi,$$

$$M_1(u_r,\phi)=b_{11}\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{2b_{11}}{r}u_r+b_{12}\Delta_0\phi,$$

$$M_2(u_r,\phi)=\frac{u_r}{r}+r\frac{\partial\phi}{\partial r},$$

$$M_3(\psi)=r\frac{\partial\psi}{\partial r},$$

$$\Delta_0=\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+ctg\theta\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}.$$

Отметим, что соотношения (1.9), (1.10) тождественно удовлетворяются, если положить

$$L_2(u_r,\varphi)=-\frac{\partial P(r;\theta,\varphi)}{\partial\varphi},\ \ L_3(\psi)=\sin\theta\frac{\partial P(r;\theta,\varphi)}{\partial\theta},$$

где функция $P(r;\theta,\varphi)$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta_0 P(r;\theta,\varphi)=0. \tag{1.13}$$

Функция $P(r;\theta,\varphi)$ параметрически зависит от r. Если теперь двумерные поля внешних касательных напряжений на боковой поверхности плиты $[q_{r\theta}^{(s)},\, q_{r\varphi}^{(s)}]$ представить в виде

$$q_{r_\theta}^{(s)}=\frac{\partial q_2^{(s)}}{\partial\theta}+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial q_3^{(s)}}{\partial\varphi},\qquad q_{r_\varphi}^{(s)}=\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial q_2^{(s)}}{\partial\varphi}-\frac{\partial q_3^{(s)}}{\partial\theta}, \tag{1.14}$$

то исходная краевая задача (1.2), (1.3) распадается на следующие две

$$L_1(u_r,\phi)=0,\quad L_2(u_r,\phi)=-\frac{\partial P}{\partial\varphi}, \tag{1.15}$$

$$M_1(u_r,\phi)\big|_{r=r_s}=q_r^{(s)},\quad M_2(u_r,\phi)\big|_{r=r_s}=q_r^{(s)}-\frac{\partial e^{(s)}}{\partial\varphi}, \tag{1.16}$$

$$L_3(\psi)=\sin\theta\frac{\partial P}{\partial\theta}, \tag{1.17}$$

$$M_3(\psi)\big|_{r=r_s}=q_3^{(s)}+\sin\theta\frac{\partial e^{(s)}}{\partial\theta}. \tag{1.18}$$

Здесь $e^{(s)}(\theta,\varphi)$ – произвольные функции, удовлетворяющие уравнению

$$\Delta_0 e^{(s)}(\theta,\varphi)=0.$$

Таким образом, исходная краевая задача (1.2), (1.3) расчленилась на две независимые: краевую задачу для системы дифференциальных уравнений (1.15) с граничными условиями (1.16) относительно пары функций

(u_r, ϕ) (потенциальная задача) и краевую задачу для одного дифференциального уравнения (1.17) с граничным условием (1.18) (вихревая задача).

Произвол при переходе от исходной краевой задачи (1.2)-(1.3), обусловленный функциями $P(r;\theta,\varphi)$ и $e^{(s)}(\theta,\varphi)$, можно ликвидировать построением частных решений следующих неоднородных уравнений и граничных условий:

$$L_1(u_r,\tilde{\phi})=0,\quad L_2(u_r,\tilde{\phi})=-\frac{\partial P}{\partial\varphi},\tag{1.19}$$

$$M_1(u_r,\tilde{\phi})\Big|_{r=r_s}=0,\quad M_2(u_r,\tilde{\phi})\Big|_{r=r_s}=-\frac{\partial e^{(s)}}{\partial\varphi},\tag{1.20}$$

$$L_3(\tilde{\psi})=\sin\theta\frac{\partial P}{\partial\theta},\tag{1.21}$$

$$M_3(\tilde{\psi})\Big|_{r=r_s}=\sin\theta\frac{\partial e^{(s)}}{\partial\theta}.\tag{1.22}$$

В рассматриваемом случае, в качестве частного решения неоднородных уравнений (1.19) и (1.21) можно взять решение следующего вида.

$$u_r=0$$

$$\tilde{\phi}(r;\theta,\varphi)=-\frac{\partial}{\partial\varphi}\tilde{f}(r;\theta,\varphi),\ \tilde{\psi}(r;\theta,\varphi)=\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\tilde{f}(r;\theta,\varphi),$$

$$\tilde{f}(r;\theta,\varphi)=C_1(r;\theta,\varphi)f_1(r)+C_2(r;\theta,\varphi)f_2(r),$$

$$C_k(r;\theta,\varphi)=\int_{r_1}^{r_2}f(r;\theta,\varphi)g_k(r)dr,\quad k=1,2$$

$$g_k(r)=(-1)^k f_k(r)d^{-1}(r)$$

$$d(r)=f_1(r)\frac{df_2(r)}{dr}-f_2(r)\frac{df_1(r)}{dr}.$$

Здесь $P(r;\theta,\varphi)$ – решение уравнения (1.13), а f_1, f_2 – два линейно-независимых решения:

$$r\frac{d^2f}{dr^2}+4\frac{df}{dr}+\frac{2G_0}{r}f=0.$$

Поскольку поле смешений, определяемое функциями $\tilde{\phi}$, $\tilde{\psi}$, тождественно равно нулю, можно считать $P=0$. Из (1.19)-(1.22) имеем:

$$L_1(u_r,\tilde{\phi})=0,\quad L_2(u_r,\tilde{\phi})=0,\tag{1.23}$$

$$M_1(u_r,\tilde{\phi})\Big|_{r=r_s}=0,\quad M_2(u_r,\tilde{\phi})\Big|_{r=r_s}=-\frac{\partial e^{(s)}}{\partial\varphi},\tag{1.24}$$

$$L_3(\widetilde{\psi}) = 0,$$

$$M_3(\widetilde{\psi})\Big|_{r=r_s} = \sin\theta \frac{\partial e^{(s)}}{\partial \theta}. \qquad (1.25)$$

Вопрос о построении частных задач (1.23)-(1.25) не представляет особого труда, поэтому ниже будем считать, что $e^{(s)}(\theta, \varphi) = 0$. Окончательно имеем:

$$L_1(u_r, \phi) = 0, \quad L_2(u_r, \phi) = 0, \qquad (1.26)$$

$$M_1(u_r, \phi)\Big|_{r=r_s} = q_r^{(s)}, \quad M_2(u_r, \phi)\Big|_{r=r_s} = q_2^{(s)}, \qquad (1.27)$$

$$L_3(\psi) = 0, \qquad (1.28)$$

$$M_3(\psi)\Big|_{r=r_s} = q_3^{(s)}. \qquad (1.29)$$

2. Таким образом, общая задача теории упругости для плиты переменной толщины расчленяется на две. Однако решения этих двух задач связаны через граничные условия на боковой поверхности плиты. Поэтому при построении однородных решений возникают трудности главным образом, связанные с неортогональностью однородных решений.

Однородным решением будем называть всякое решение уравнений равновесия (1.6), удовлетворяющее условию отсутствия напряжений на торцах плиты (1.1).

Решение (1.26) и (1.28) отыскиваем в виде

$$\begin{aligned} u_r &= r^{\lambda} u(\theta) e^{im\varphi}, \\ \phi &= r^{\lambda-1} \upsilon(\theta) e^{im\varphi}, \\ \psi &= i r^{\lambda-1} w(\theta) e^{im\varphi}. \end{aligned} \qquad (2.1)$$

Подставляя (2.1) в (1.26), (1.28) и граничные условия (1.1) получим:

$$\begin{aligned} &[b_{11}\lambda(\lambda+1) + 2(b_{12} - b_{22} - b_{23})]u + u'' + ctg\theta\, u' - \frac{m^2}{\sin^2\theta}u + \\ &+ [(b_{12}+1)\lambda + b_{12} - b_{22} - b_{23} - 1)]\left(\upsilon'' + ctg\theta\,\upsilon' - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\upsilon\right) = 0, \\ &[(b_{12}+1)\lambda + b_{22} + b_{23} + 2]u + [\lambda(\lambda+1) + 2(G_0 - 1)]\upsilon + \\ &+ b_{22}\left(\upsilon'' + ctg\theta\,\upsilon' - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\upsilon\right) = 0, \end{aligned} \qquad (2.2)$$

$$[\lambda(\lambda+1) + 2(G_0 - 1)]w + G_0\left(w'' + ctg\theta\, w' - \frac{m^2}{\sin^2\theta}w\right) = 0 \qquad (2.3)$$

$$\left[(b_{12}\lambda + b_{22} + b_{23})u + b_{22}\upsilon'' + b_{23}ctg\theta\,\upsilon' - b_{23}\frac{m^2}{\sin^2\theta}\upsilon - 2G_0 m\left(\frac{1}{\sin\theta}w\right)'\right]_{\theta=\theta_n} = 0 \qquad (2.4)$$

$$\left[u' + (\lambda-1)\upsilon' - \frac{(\lambda-1)m}{\sin\theta}w\right]_{\theta=\theta_n} = 0 \qquad (2.5)$$

$$\left[2m\left(\frac{1}{\sin\theta}\upsilon\right)' - \sin\theta\left(\frac{1}{\sin\theta}w'\right)' - \frac{m^2}{\sin^2\theta}w\right]_{\theta=\theta_n} = 0\,. \tag{2.6}$$

Не вдаваясь в подробности, приведем окончательно решения уравнений (2.2), (2.3).

$$\begin{aligned}
&u(\theta) = A_1 Z_{\gamma_1}(\theta) + A_2 Z_{\gamma_2}(\theta),\\
&\upsilon(\theta) = B_0[Z_{\gamma_1}(\theta) + Z_{\gamma_2}(\theta)],\\
&w = Z_{\gamma_3}(\theta),
\end{aligned} \tag{2.7}$$

где

$$Z_\gamma(\theta) = C_\gamma T_\gamma(\theta) + B_\gamma F_\gamma(\theta)$$

$$T_\gamma(\theta) = P_\gamma^m(\cos\theta) + P_\gamma^m(-\cos\theta) = P_\gamma^m(\sin\varepsilon\eta) + P_\gamma^m(-\sin\varepsilon\eta)\,,$$

$$F_\gamma(\theta) = P_\gamma^m(\cos\theta) - P_\gamma^m(-\cos\theta) = -[P_\gamma^m(\sin\varepsilon\eta) - P_\gamma^m(-\sin\varepsilon\eta)]\,,$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} + \varepsilon\eta;\ -1 \le \eta \le 1\,.$$

γ_1, γ_2 – корни биквадратного уравнения:

$$\begin{aligned}
&b_{22}\gamma^2(\gamma+1)^2 - [(b_{11}b_{22} - b_{12}^2 - 2b_{12})\lambda(\lambda+1) + 2b_{22} +\\
&+ 2(b_{12} - b_{22} - b_{23})(G_0 - 1)]\gamma(\gamma+1) +\\
&+ [(b_{11}\lambda(\lambda+1) + 2(b_{12} - b_{22} - b_{23})][\lambda(\lambda+1) + 2(G_0 - 1)] = 0
\end{aligned} \tag{2.8}$$

$$\gamma_3 = \frac{1}{G_0}[\lambda(\lambda+1) + 2(G_0 - 1)]\,.$$

Отметим, что, как и в работе [2], здесь вместо традиционных линейно-независимых решений уравнения Лежандра $P_\gamma(\cos\theta)$, $Q_\gamma(\cos\theta)$ для удобства введены четные $T_\gamma(\theta)$ и нечетные $F_\gamma(\theta)$ функции относительно срединной плоскости плиты, которые также являются линейно-независимыми решениями уравнения Лежандра. Такая форма решений позволяет расчленить общую задачу для плиты на две независимые задачи растяжения-сжатия плиты и задачу изгиба плиты.

В этой работе мы будем рассматривать только вторую задачу, поэтому полагаем $C_{\gamma_1} = C_{\gamma_2} = B_{\gamma_3} = 0$.

Таким образом, окончательно имеем:

$$\begin{aligned}
&u_r = r^\lambda[A_1 F_{\gamma_1}(\theta) + A_2 F_{\gamma_2}(\theta)]e^{im\varphi},\\
&u_\theta = r^\lambda\left\{b_0[F'_{\gamma_1}(\theta) + F'_{\gamma_2}(\theta)] - \frac{m}{\sin\theta}T_{\gamma_3}(\theta)\right\}e^{im\varphi},\\
&u_\varphi = ir^\lambda\left\{\frac{mb_0}{\sin\theta}[F_{\gamma_1}(\theta) + F_{\gamma_2}(\theta)] - T'_{\gamma_3}(\theta)\right\}e^{im\varphi}.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Удовлетворение граничных условий на торцах плиты (2.4), (2.5) даёт однородную линейную алгебраическую систему третьего порядка относительно постоянных $C_{\gamma_1}, C_{\gamma_2}, C_{\gamma_3}$.

Из условия существования нетривиальных решений этой системы получаем характеристическое уравнение для определения собственных значений λ $\left(\lambda = z - \dfrac{1}{2}\right)$:

$$D(z,\theta_1) = \left[d_{12} D_{11}(\theta_1) \frac{dF_{\gamma_2}}{d\theta}(\theta_1) - d_{11} D_{12}(\theta_1) \frac{dF_{\gamma_1}(\theta)}{d\theta} \right] L(\theta_1) +$$

$$+ 2m^2 \left(z - \frac{3}{2} \right) b_0 (1 + tg^2 \varepsilon) T_{\gamma_3}(\theta_1) \left[\ell_2(\theta_1) D_{11}(\theta_1) - \ell_1(\theta_1) D_{12}(\theta_1) \right] - \quad (2.10)$$

$$- 4m^2 b_0 G_0 (1 + tg^2 \varepsilon) \left[\frac{dT_{\gamma_3}}{d\theta}(\theta_1) - tg\varepsilon \cdot dT_{\gamma_3}(\theta_1) \right] H(\theta_1) = 0,$$

где

$$D_{1k}(\theta) = \left(C_{1k} + \frac{2b_0 G_0 m^2}{\cos \varepsilon\eta} \right) F_{\gamma_k}(\theta) + 2b_0 G_0 tg\varepsilon\eta \frac{dF_{\gamma_k}(\theta)}{d\theta} \qquad (k = 1,\ 2)$$

$$L(\theta) = [\gamma_3(\gamma_3 + 1) - 2m^2(1 + tg^2 \varepsilon\eta)] T_{\gamma_3}(\theta) - 2tg\varepsilon\eta \frac{T_{\gamma_3}(\theta)}{d\theta}$$

$$\ell_k(\theta) = \frac{dF_{\gamma_k}}{d\theta}(\theta) + tg\varepsilon\eta F_{\gamma_k}(\theta)$$

$$H(\theta) = (d_{11} - d_{12}) \frac{dF_{\gamma_1}}{d\theta}(\theta) \frac{dF_{\gamma_2}}{d\theta}(\theta) + tg\varepsilon\eta \left[d_{11} F_{\gamma_2}(\theta) \frac{dF_{\gamma_1}}{d\theta}(\theta) - d_{12} F_{\gamma_1}(\theta) \frac{dF_{\gamma_2}}{d\theta}(\theta) \right].$$

$$C_{1k} = \left[b_{12} \left(z - \frac{1}{2} \right) + b_{22} + b_{23} \right] A_k - b_{22} \gamma_k (\gamma_k + 1)$$

$$d_{1k} = A_k + \left(z - \frac{3}{2} \right) b_0, \quad C_{13} = -2G_0 b_0$$

$$A_k = -b_{22} \gamma_k (\gamma_k + 1) + z^2 - \frac{1}{4} + 2(G_0 - 1)$$

$$b_0 = -\left[(b_{12} + 1) \left(z - \frac{1}{2} \right) + b_{22} + b_{23} + 2 \right].$$

Трансцендентное уравнение (2.10), как целая функция параметра z, определяет счетное множество z_n с точкой сгущения на бесконечности. Суммируя по всем корням z_n получаем однородные решения следующего вида:

$$
\begin{aligned}
u_r &= \frac{1}{\sqrt{r}}\sum_{n=1}^{\infty} C_n r^{z_n} u_{1n}(\theta) e^{im\varphi}\,,\\
u_\theta &= \frac{1}{\sqrt{r}}\sum_{n=1}^{\infty} C_n r^{z_n} u_{2n}(\theta) e^{im\varphi}\,,\\
u_\varphi &= \frac{i}{\sqrt{r}}\sum_{n=1}^{\infty} C_n r^{z_n} u_{3n}(\theta) e^{im\varphi}\,,\\
\sigma_r &= \frac{G}{r\sqrt{r}}\sum_{n=1}^{\infty} C_n r^{z_n} Q_{1n}(\theta) e^{im\varphi}\,,\\
\sigma_\theta &= \frac{G_1}{r\sqrt{r}}\sum_{n=1}^{\infty} C_n r^{z_n} Q_{2n}(\theta) e^{im\varphi}\,,\\
\sigma_\varphi &= \frac{G_1}{r\sqrt{r}}\sum_{n=1}^{\infty} C_n r^{z_n} Q_{3n}(\theta) e^{im\varphi}\,,\\
\tau_{r\theta} &= \frac{G_1}{r\sqrt{r}}\sum_{n=1}^{\infty} C_n r^{z_n} T_{1n}(\theta) e^{im\varphi}\,,\\
\tau_{r\varphi} &= \frac{iG_1}{r\sqrt{r}}\sum_{n=1}^{\infty} C_n r^{z_n} T_{2n}(\theta) e^{im\varphi}\,,\\
\tau_{\theta\varphi} &= \frac{iG_1}{r\sqrt{r}}\sum_{n=1}^{\infty} C_n r^{z_n} T_{3n}(\theta) e^{im\varphi}\,,
\end{aligned}
\tag{2.11}
$$

где

$$u_{1n}(\theta) = A_1\Delta_{1n}F_{\gamma_{1n}}(\theta) - A_2\Delta_{2n}F_{\gamma_{2n}}(\theta)$$

$$u_{2n}(\theta) = b_0\left[\Delta_{1n}\frac{dF_{\gamma_{1n}}(\theta)}{d\theta} - \Delta_{2n}\frac{dF_{\gamma_{2n}}(\theta)}{d\theta}\right] - m\cos^{-1}\varepsilon\eta\Delta_{3n}T_{\gamma_{3n}}(\theta)$$

$$u_{3n}(\theta) = mb_0\cos^{-1}\varepsilon\eta\left[\Delta_{1n}F_{\gamma_{1n}}(\theta) - \Delta_{2n}F_{\gamma_{2n}}(\theta)\right] - \Delta_{3n}\frac{dT_{\gamma_{3n}}(\theta)}{d\theta}$$

$$Q_{1n}(\theta) = \left\{\left[b_{11}\left(z_n - \frac{1}{2}\right) + 2b_{12}\right]A_1 - b_{12}b_0\gamma_{1n}(\gamma_{1n}+1)\right\}\Delta_{1n}F_{\gamma_{1n}}(\theta) -$$

$$-\left\{\left[b_{11}\left(z_n - \frac{1}{2}\right) + 2b_{12}\right]A_2 - b_{12}b_0\gamma_{2n}(\gamma_{2n}+1)\right\}\Delta_{2n}F_{\gamma_{2n}}(\theta)$$

$$Q_{2n}(\theta) = \left\langle\left\{\left[b_{12}\left(z_n - \frac{1}{2}\right) + b_{22} + b_{23}\right]A_1 - b_{23}b_0\gamma_{1n}(\gamma_{1n}+1) - 2m^2G_0b_0(1+tg^2\varepsilon\eta)\right\}\times\right.$$

$$\left.\times F_{\gamma_{1n}}(\theta) - 2G_0b_0 tg\varepsilon\eta\frac{dF_{\gamma_{1n}}(\theta)}{d\theta}\right\rangle\Delta_{1n} - \left\langle\left\{\left[b_{12}\left(z_n - \frac{1}{2}\right) + b_{22} + b_{23}\right]A_2 -\right.\right.$$

$$\left.\left.-b_{23}b_0\gamma_{2n}(\gamma_{2n}+1) - -2m^2G_0b_0(1+tg^2\varepsilon\eta)\right\}F_{\gamma_{2n}}(\theta) - 2G_0b_0\cdot tg\varepsilon\eta\frac{dF_{\gamma_{2n}}(\theta)}{d\theta}\right\rangle\Delta_{2n} +$$

$$+2mG_0\cos^{-1}\varepsilon\eta\left[\frac{dT_{\gamma_{3n}}(\theta)}{d\theta}+tg\varepsilon\eta T_{\gamma_{3n}}(\theta)\right]\Delta_{13},$$

$$Q_{3n}(\theta)=D_{11}(\theta)\Delta_{1n}-D_{12}(\theta)\Delta_{2n}-2mG_0\cos^{-1}\varepsilon\eta\Delta_{3n}\left[\frac{dT_{\gamma_{3n}}(\theta)}{d\theta}+tg\varepsilon\eta T_{\gamma_{3n}}(\theta)\right],$$

$$T_{1n}(\theta)=d_{11}\Delta_{1n}\frac{dF_{\gamma_{1n}}(\theta)}{d\theta}-d_{12}\Delta_{2n}\frac{dF_{\gamma_{2n}}(\theta)}{d\theta}-\left(z_n-\frac{3}{2}\right)m\Delta_{3n}\cos^{-1}\varepsilon\eta\, dT_{\gamma_{3n}}(\theta),$$

$$T_{2n}(\theta)=m\cos^{-1}\varepsilon\eta[d_{11}\Delta_{1n}F_{\gamma_{1n}}(\theta)-d_{12}\Delta_{1n}F_{\gamma_{2n}}(\theta)]-\left(z_n-\frac{3}{2}\right)\Delta_{3n}\frac{dT_{\gamma_{3n}}(\theta)}{d\theta},$$

$$T_{3n}(\theta)=2mb_0\cos^{-1}\varepsilon\eta[\ell_1(\theta)\Delta_{1n}-\ell_2(\theta)\Delta_{1n}]+L(\theta)\Delta_{3n},$$

$$\Delta_{1n}(\theta)=d_{11}\frac{dF_{\gamma_{1n}}(\theta)}{d\theta}L(\theta_1)+2\left(z_n^2-\frac{3}{2}\right)m^2G_0(1+tg^2\varepsilon)T_{\gamma_{3n}}(\theta_1)\ell(\theta_1),$$

$$\Delta_{2n}(\theta)=d_{11}\frac{dF_{\gamma_{2n}}(\theta)}{d\theta}L(\theta_1)L(\theta_1)+2b_0\left(z_n-\frac{3}{2}\right)m^2(1+tg^2\varepsilon)T_{\gamma_{3n}}(\theta_1)\ell(\theta_1)$$

$$\Delta_{3n}=2mb_0\cos^{-1}\varepsilon H(\theta_1).$$

C_k – произвольные постоянные, которые определяются при удовлетворении граничных условий на боковой поверхности с помощью вариационного принципа Лагранжа.

Построенные однородные решения, как видно из (2.11) верны для любой трехмерной среды, ограниченной двумя сферическими и двумя коническими поверхностями произвольной толщины.

Однако, несмотря на свою общность, такие решения имеют только теоретическую значимость.

Практическое применение таких решений, несмотря на бурное развитие вычислительной техники в настоящее время, малоэффективны.

Тем не менее, предполагая плиты тонкостенным, на их основе можно получить простую асимптотическую формулу, позволяющий рассчитать напряженно-деформированного состояния.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мехтиев М.Ф. Построение уточненных прикладных теорий для плиты переменной толщины // Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-мехн. и матем. наук, 1979, в.3, с.47-52.
2. Ахмедов Н.Г., Мехтиев М.Ф. Анализ трёхмерной задачи теории упругости для неоднородного усечённого конуса // РАН, ПММ, 1993, т.57, в.5, с.113-119.
3. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела, М.: Наука, 1977, 415с.
4. Mekhtiev M.F., Gyulmamedov M.Kh. Dynamik problems of elasticity the theory for spherical shell // Transactions of NAS Azerbaijan, Mathematics and mechanics, Baku, "Elm", 1998, Vol. XVIII, №3-4, p.195-205.

DƏYİŞƏN QALINLIQLI TRANSVERSAL-İZOTROP LÖVHƏ ÜÇÜN ELASTİKLİK NƏZƏRİYYƏSİNİN QEYRİ-SİMMETRİK ƏYİLMƏ MƏSƏLƏSİ ÜÇÜN BİRCİNS HƏLLƏRİN QURULMASI

M.F.MEHDİYEV, A.R.ƏMRAHOVA, P.M.SADIXOV

XÜLASƏ

Dəyişən qalınlıqlı transversal-izotrop lövhə üçün elastiklik nəzəriyyəsinin qeyri-simmetrik əyilmə məsələsinə baxılır.

Helmhols teoreminin köməyi ilə ümumi məsələ lövhənin dartılma və əyilmə məsələlərinə ayrılır, əyilmə məsələsi üçün bircins həllər qurulur.

CONSTRUCTION OF HOMOGENEOUS SOLUTION OF NON AXIALLY CURVE PROBLEM OF THE ELASTICITY THEORY FOR TRANSVERSALLY-ISOTROPIC PLATE OF VARIABLE THICKNESS

M.F.MEKHTIEV, A.R.AMRAHOVA, P.M.SADYKOV

SUMMARY

Non axially symmetric curve problem of elasticity theory for a transversally-isotropic plate of variable thickness is considered.

The general problem of elasticity theory a plate of variable thickness is partitioned into two independent problems: tension problem and a problem on plates curve.

In the present paper homogeneous solutions for the curve problem are constructed.